ALI
Mathinées lacaniennes

24 novembre 07

Atelier de Topologie *2*
Henri Cesbron-Lavau

Je vais essayer de faire un peu d'énonciation sur quelque chose d'écrit comme un énoncé :
Henri Cesbron-Lavau écrit au tableau en commentant :

J'écris tout

Vient ensuite **en quatre lettres** ce qui donne une autre dimension

Et évidemment **et rien aussi**.

Ceci pour interroger justement la question du tout, du rien, de la limite, qui sont d'abord des termes, des mots, qui viennent dans une phrase. Dans quelle topologie est-ce que ces mots nous posent des questions ? Á partir de quel moment est-ce que ça pose des questions qui relèvent de la topologie ?

<u>I Rappel de la définition d'une topologie</u>

La fois dernière nous avions introduit un espace topologique, et j'en rappelle la définition en quelques mots :
On a un ensemble, E , qui contient des éléments désignés par des lettres : a, b, etc. On dira qu'on a défini une topologie à partir du moment où sur cet ensemble on aura une famille de sous-ensembles, σ, et si cette famille σ a en plus les trois propriétés suivantes.
D'abord σ est un sous ensemble de E si tous les éléments qui appartiennent à σ appartiennent aussi à E. $\sigma \in E$
Les trois propriétés :

1) Si E est dans la famille et l'ensemble vide ∅ aussi : $E \in \sigma$ et $\emptyset \in \sigma$
Puisque la définition c'est tout élément du sous-ensemble appartient à l'ensemble complet. Eh bien, dans cette famille qui ne comprend pas tous les sous-ensembles mais certains sous-ensembles, il faut que j'ai E, l'ensemble complet et aussi l'ensemble vide ∅.

2) Si la réunion de deux sous-ensembles appartient à l'ensemble.
La réunion, c'est ce qui appartient à l'un , à l'autre, ou aux deux.
Si la réunion d'un certain nombre d'ouverts, d'un certains nombre d'éléments, appartient aussi à la famille σ — et il peut y en avoir une infinité :
$\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \qquad \cup \sigma_n \cup \quad \in \sigma$

3) Si l'intersection d'un certain nombre d'éléments de la famille — mais en nombre fini — appartient à la famille σ :

$\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \qquad \cap \sigma_n \in \sigma$

Si cette famille σ vérifie ces trois propriétés, alors on dira qu'on a défini une topologie sur E. Autrement dit c'est le fait, sur un ensemble, de repérer une série de sous-ensembles qui confère à E cette topologie. Dans la mesure, je vous le rappelle, où cette famille de sous-ensembles vérifie bien ces trois propriétés.
Ça nous indique que la topologie est construite sur un ensemble : elle n'est pas naturelle.

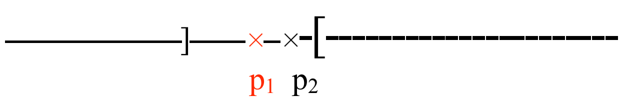
Il y a des topologies auxquelles on est habitué, et ces topologies qui sont intuitives ne satisfont pas aux nécessités des mathématiques puisqu'on ne peut pas se baser sur l'intuition — si ce n'est pour avoir l'idée d'aller chercher une démonstration, mais ensuite la démonstration il faudra véritablement l'établir.

Une conséquence de notre définition, c'est que sur le même ensemble E, on peut choisir de prendre en compte plusieurs topologies. Sur un même ensemble il peut y avoir des topologies d'ordre différent, selon qu'on prendra en compte telle ou telle famille de sous-ensembles. Mais cela ne sera topologique que dans la mesure où ces trois propriétés seront vérifiées.

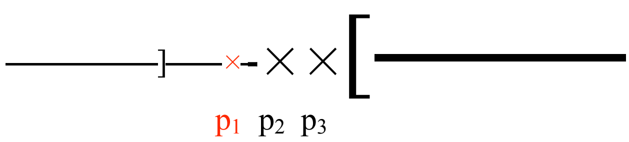
<u>II Les ouverts : infinité d'unions et nombre fini d'intersections</u>

Une question qui mérite d'être précisée c'est pourquoi est-ce qu'on accepte une infinité d'unions d'ouverts et seulement un nombre fini d'intersections d'ouverts.
Ce sont des questions qui nous intéressent dans la mesure où elles font intervenir fini et infini.
Et si je parle d'**ouverts,** c'est qu'à partir du moment où la topologie est définie par une famille de sous-ensembles vérifiant ces trois propriétés, on a coutume d'appeler chaque sous-ensemble de cette famille un **ouvert**.
Si on prend par exemple la droite des nombres rationnels, ou la droite des nombres réels, c'est-à-dire une droite telle que entre deux points il y a une infinité de points. Si je prends des ouverts, que je vais symboliser par ces crochets, et qui signifient tous les points entre ces crochets sauf les extrémités :

Je peux prendre un point aussi proche que je le souhaite de l'extrémité — sans qu'il soit l'extrémité puisque l'extrémité n'appartient pas à l'ouvert — le point p_1 que je vais représenter en rouge, eh bien entre l'extrémité et ce point, il y a un autre point, p_2 : je le dessine avec un effet de loupe :



Et je peux continuer à le faire, en grossissant encore une fois la représentation :



Et je peux continuer, puisque être proche de l'extrémité ce n'est pas être sur l'extrémité, et il y a toujours place pour un point : en être *proche* ce n'est pas être *sur* — il reste toujours de la place.

Si je prends un nombre fini d'ouverts, l'intersection c'est quoi ? Ce sont les points qui vont être communs à cette famille d'ouverts. Par exemple, si je reprends ma première ligne, avec le segment ouvert, et que je construis un autre ouvert, représenté en bleu, l'intersection des deux ouverts ça va être le segment rouge :

——————————]——]——[—[——————————

Si je répète l'opération indéfiniment, il peut se produire que l'infinité d'intersections d'ouverts soit la même chose que ce qui n'est pas un ouvert.
Je vais prendre un exemple : si je continue ce cheminement, en prenant une infinité d'ouverts sur cette droite et en me rapprochant indéfiniment de deux points que je vais appeler **a** et **b** :

————]———]——]——]———+————+——[——[——[———[————
a b

Mes ouverts vont progressivement insérer **a** et **b.** Il suffit que le point de gauche soit défini par $a - \frac{1}{n}$ — avec $\frac{1}{n}$ étant le « presque » — la distance entre la bordure de l'ouvert et le point a. Et le point b est défini par $b + \frac{1}{n}$
Si j'emboîte tous mes ouverts indéfiniment et que j'en prends l'intersection, c'est-à-dire ce qui est commun à tous ces ouverts, j'obtiendrai comme intersection de cette infinité d'ouverts le segment fermé [a,b]. Pourquoi ?
Là, on arrive au type de démonstration qui est récurrent dans la topologie : c'est-à-dire que la topologie ne se supporte pas d'évidence. L'évidence et l'intuition vont nous guider dans la recherche de l'écriture, mais l'écriture elle seule va pouvoir établir les propositions.

Vous voyez donc qu'on se rapproche indéfiniment de **a** et de **b** en continuant à inscrire un grand nombre d'ouverts sur la droite. Je vais m'arrêter juste un petit peu avant le point **a** à gauche et avant le point **b** à droite :

———]———]——]——]———]+—————+[——[———[——[———[———
a b

Vous voyez que l'intersection de tous ces ouverts, c'est-à-dire ce qui est commun à tous ces ouverts, c'est ce segment représenté en rouge et qui est un ouvert.
Mais dans ce cas, d'une part je n'ai pas un nombre infini d'ouverts, et d'autre part j'ai toujours la possibilité d'aller toujours chercher entre là où je me suis arrêté et le point **a** au moins un point et continuer. C'est-à-dire que de fil en aiguille je vais finalement y arriver au point **a** : si je m'arrête avant, il y a forcément un point entre là où je me suis arrêté et le point **a** qui me permet d'avancer, quelle que soit la proximité.

- *Virginia Hasenbalg J'ai un peu de mal à suivre ta démonstration : d'où sortent ces points* ***a*** *et* ***b*** *?Pourquoi l'intersection n'irait-elle pas se collaber ? Et pourquoi est-ce que cette intersection de sous-ensembles est si ordonnée ?*

Oui, tu veux dire qu'on peut avoir quelque chose comme ceci :

——————]———]—[—[—————

avec l'intersection qui est représentée en rouge.

- *VH Oui.*

En fait je suis dans la démarche de montrer qu'il y a un cas au moins où cette propriété n'est pas vraie si le nombre d'intersections était infini. C'est-à-dire que je suis en train de montrer qu'il y a au moins une infinité d'ouverts qui est un fermé. Je ne suis pas en train de vous montrer une propriété générale, et ça n'établit pas que la propriété est nécessaire parce qu'on n'est pas dans une démonstration.
On part de la définition de la topologie, et si on prend cette définition, je montre la nécessité, ou plutôt le bien-fondé de cette troisième définition qui dit que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert. Et je suis en train s'appuyer, par cette démonstration, pourquoi on exige cela que d'un nombre fini d'ouverts.
Cette façon de faire que je suis en train de vous montrer permet d'établir qu'un nombre infini d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Ce que je suis en train d'établir, c'est que l'intersection d'une infinité d'ouverts c'est un fermé.
Je pose **a** et je pose **b**, et dans ce cas-là je suis en train de montrer que l'infinité d'intersection d'ouverts c'est un fermé. Je les pose : mais les mathématiques ont commencé comme ça, elles ne viennent pas de la nature. Je pose, j'écris....

On peut prendre la façon d'emboîter les ouverts, que tu proposes, mais laisse-moi plutôt aller au plus simple pour montrer qu'il faut une infinité d'intersections d'ouverts pour obtenir un fermé.
Pourquoi est-ce qu'on va obtenir un fermé ? Parce que **a** et **b** vont faire partie de l'intersection commune : c'est le point d'arrêt de cette progression. Donc une infinité d'ouverts, si on en prend l'intersection, peut donner un fermé.
C'est pourquoi on a posé dans cette définition de la topologie que ce soit un nombre fini d'intersections d'ouverts.

Alors que pour l'union — ce qui comprend tous les points qui appartiennent à l'un, à l'autre ou à plusieurs sous-ensembles — c'est tout ce qui va être représenté ci-dessous entre les deux crochets rouges :

——]——]—]—]———+———+——[——[—[——[——
a b

Comme il suffit pour faire partie de l'union qu'il y ait au moins un ouvert qui contienne le point, comme je suis parti de l'ouvert rouge, quelque chose qui englobe, tout ce qu'il y a à l'intérieur fait partie de l'union.

- Question Dans la leçon II D'un discours qui ne serait pas du semblant, Lacan dit que « la nature foisonne de semblants ». Est-ce que ça correspondrait à un ensemble ouvert ? Après, il dit que le discours scientifique vient poser des « petites lettres » sur cette infinité de semblants : ce discours vient alors trouer le semblant. Est-ce que ça ne correspond pas à l'intersection d'un ensemble fini sur un ensemble infini ?

L'image est très jolie. Ce qui est à questionner c'est que vous introduisez là le « foisonnement de la nature» : on pourrait dire que la nature ce serait la droite — bien qu'on dira quelque chose là-dessus après — et que poser des signifiants c'est précisément mettre en place une topologie dessus.

- VH Pour aller dans le sens de la question : c'est une démonstration logique de la nécessité de poser un fini quelque part pour pouvoir opérer...

La nécessité : attention, elle ne vient pas de la nature ! C'est une démarche de construction de quelque chose qui va pouvoir être utile, servir. D'ailleurs au début, ça ne se présente pas comme ça, mais comme un plaisir : le mathématicien aime faire ces écritures-là, il les fait et il se trouve que certaines ont des conséquences intéressantes et d'autres pas. Dans ce cas précis, cette définition de topologie a des conséquences intéressantes.
Souvent d'ailleurs, la démarche c'est qu'il y a une topologie pas très élaborée, un peu grossière, qui fonctionne et avec laquelle on travaille, et puis à un moment donné on bute sur un problème précis et on se dit alors qu'il faut peut-être repréciser les fondations. Et c'est dans cet aller-retour qu'avancent les mathématiques... Ce n'est pas au début de la topologie qu'on a trouvé ces définitions dont nous parlons aujourd'hui, on a progressé et ce n'est qu'après qu'on est revenu à ces fondements.

- VH Il y a plusieurs topologies. Est-ce que les propriétés dont nous parlons aujourd'hui sont un tronc commun à ces topologies ?

Oui parce qu'à partir de là on va pouvoir rajouter des propriétés qu'on impose à telle ou telle topologie. On peut définir d'autres choses, mais on a l'habitude d'appeler topologie ce qui a au moins ces trois propriétés.

Vous voyez que les mathématiciens éprouvent le besoin d'écrire les choses pour qu'elles puissent faire l'objet de travail, d'un travail qui a des conséquences. Ce n'est pas quelque chose qui s'éprouve — même si certains mathématiciens ont écrit sur ce qu'ils ont éprouvé au moment où ils ont trouvé une démonstration — ce n'est pas ce qui fonde une démonstration. Et quand ce qui est éprouvé, le sentiment, vient à fonder une démonstration, il y a un développement : c'est quelque chose qu'on a vu, éprouver l'infini, chez Nicolas de Cuse. Mais Cuse, il avait un certain nombre de dispositions autour qui faisait que ça fonctionnait, et de ce qu'on en sait, il a eu une vie tout à fait développée.
Pour Cantor, par contre, il y a eu un moment où ça a basculé : parce qu'il y a eu un moment donné quelque chose qui n'en est pas passé complètement par l'épreuve de l'écriture. Ce sont toutes les théories qui lui sont venues alors sur la paternité, sur le Christ, toutes ces choses-là qui se sont présentées progressivement comme des certitudes. Pourquoi ? Peut-être que ce vertige de la diagonale, c'est-à-dire de toucher-là à quelque chose qui est de l'ordre d'un infini radical, de l'éprouver comme un vertige et non pas de l'éprouver comme quelque chose de l'ordre d'une écriture vient du fait qu'il l'a écrit mais il ne s'en est pas tenu là. Qu'on l'éprouve, ce vertige, dans la recherche de la démonstration, certainement : ça passe par l'imaginaire, ça ne tombe pas du ciel une démonstration. Mais une fois que la démonstration est établie, ce qu'il y avait d'éléments vertigineux subsistent encore dans la démonstration, mais sans appeler à aller plus loin dans l'axe de la démonstration. En rester sur le versant du vertige, c'est là que se situe, à mon avis, le décrochage.

- VH On entend souvent dans les milieux analytiques dire que ça s'est mal passé pour Cantor, mais que Gödel, son incomplétude a donné la réponse à ce qui aurait rendu fou Cantor... Et

pourtant, un livre vient de sortir qui signale que Gödel aussi a eu son petit délire paranoïaque[1]*. Il est mort d'inanition, ayant peur d'être empoisonné...*

Je dirai qu'un délire peut en expliquer un autre, et peut même servir de rationalisation d'un autre délire. Seulement on ne choisit pas son propre délire, et puis il y a un point où chacun d'entre nous peut, à un moment donné ou à un autre, être attrapé. C'est ce qui s'est passé pour Gödel, mais à un autre endroit que Cantor pour qui c'était la question de l'infini, à un point qui est plus celui de la complétude et de l'incomplétude. Alors est-ce que toute recherche doit aboutir comme ça ? Pas forcément, pas forcément ! Il y a des mathématiciens contemporains qui vont très bien...

- *Question Gödel et Cantor ont-ils touché quelque chose de la faille dans l'Autre, du point où ça ne peut pas s'écrire ? Ce point limite peut-il se déplacer ou bien fait-il lien avec ce qui fait chacun le point de forclusion qui peut nous faire basculer ?*

Je crois qu'à un moment donné l'écriture, le fonctionnement même de l'écriture, amène au-delà de ce qui était repérable, envisagé au départ. Est-ce que ce point peut être déplacé ? Je répondrai : oui, dans une analyse lacanienne. Pourquoi ? Parce qu'il s'y fait un travail de la lettre qui, justement, permet cela. Mais c'est le seul endroit, de là où je suis, où je verrais un déplacement possible.

- *Question Est-ce qu'un espace topologique est forcément réfléchi, c'est-à-dire où l'ensemble est une partie de lui-même ? En terme aristotélicien, en logique intuitive ça ne se conçoit pas...*

Il y a déjà une chose, c'est que E, l'ensemble lui-même, appartient à la topologie, c'est-à-dire que E appartient à sa famille d'ouverts. Il est en quelque sorte pris à l'intérieur de la topologie — l'intérieur pouvant être l'ensemble lui-même. E est dedans...

- *VH Mais « dedans » quoi ?*

E, c'est ce qui est donné au départ. Sur E on met en place une famille d'ouverts. Dans cette famille — c'est là qu'est le « dedans » : dans cette famille, il y a E.

- *VH E fait partie de la famille d'ouverts, c'est une partie de la famille des ouverts. La famille d'ouverts accueille E, c'est bien ça ?*

Oui tout à fait. Ce qu'apporte la topologie, c'est qu'à cet ensemble on adjoint une écriture. Si on raisonne en terme de substance, on ne s'en sort pas : tout est dans tout, c'est-à-dire tout E est dans tout E...

- *Question Sauf l'ensemble vide ?*

En ce qui concerne l'ensemble vide, tout dépend si on introduit la question de l'existence ou pas. Mais l'ensemble vide appartient à tous les sous-ensembles. Puisqu'il vérifie que tous ces éléments appartiennent à l'ensemble en question, que tous les éléments que lui a, l'ensemble

---

[1] *Les démons de Gödel* : *Logique et folie*, de Pierre Cassou-Noguès, Seuil. ???

vide, appartiennent à l'ensemble. Comme il n'en a aucun, la proposition est toujours vraie. Si on ajoute la nécessité d'existence, alors elle est tout le temps fausse.
Donc, pour revenir sur la question de savoir si c'est un ensemble réfléchi, il est réfléchi au sens où l'ensemble appartient à la famille d'ouverts. C'est-à-dire que nous sommes dans une approche de structure, pas dans une approche de substance.

- *Intervenant Ça me fait penser à ce que disait C. Melman aux Journées sur Le symbole, en faisant la différence entre le « symbole » et le « symbolique », ce dernier étant un adjectif et pas un substantif. Si on dit que « E est topologique », on utilise « topologique » comme un adjectif, comme imaginaire ou symbolique, et non pas comme le lieu lui-même...*
Et le danger de la folie de ces mathématiciens, c'est peut-être qu'ils quittent l'adjectif pour rentrer dans la substance...

Exactement. C'est très pertinent.

<u>III Le voisinage</u>

Pour continuer cette présentation des rudiments de la topologie, je voulais vous parler de ce qu'on appelle un voisinage. C'est intéressant comme mot, voisinage...
Je reprends comme support la droite des nombres, sur laquelle il y a des ouverts :

——————]—+—[——————
a

Qu'appelle-t-on voisinage d'un point a ? Vous entendez bien que voisinage ça fait appel à une notion topologique : mais « être voisin de » est-ce que c'est pareil que « n'être pas loin de » ? Eh bien non, tout dépend de la topologie, de la propriété que nous avons accrochée à l'ensemble. Autrement dit des points pourront être voisins dans une topologie et pas dans une autre. Comment va intervenir la topologie pour définir le voisinage ?
On dira qu'un sous-ensemble de E, appelons-le $\surd$: $\surd \in E$ — et rappelons-nous qu'un sous-ensemble de E n'est pas forcément un ouvert : les ouverts sont seulement une partie des sous-ensembles.
Ce sous-ensemble sera voisinage de a, qu'on note $\surd(a)$, s'il contient un ouvert, σ, qui contient a :
$\surd(a)$ si $\exists\, \sigma \subset \surd$ avec $a \in \sigma$
autrement dit si entre le sous-ensemble et le point a on peut trouver un ouvert, alors on a $\surd(a)$.

D'ailleurs ce voisinage je pourrais le représenter comme ça :

—]—]—+[–[—[—]—]—[—]—[——]——[—
a

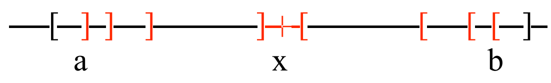
Le sous-ensemble d'ouverts ???Il y a un fermé aussi ? représenté en rouge constitue $\surd$: contient-il un ouvert qui contient a ? Oui, nous le voyons. Donc dans l'ensemble E, nous avons représenté sur la droite en rouge le voisinage de a.

- *Question : Est-ce que le voisinage peut nous donner une idée de la métonymie* ?

La partie pour le tout ? Oui.

IV Démonstration topologique du théorème de Borel-Lebesgue

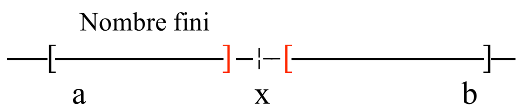
Pour terminer je voudrais vous montrer comment les topologues font la démonstration du théorème de Borel-Lebesgue. Essentiellement, c'est pour vous faire entendre la musique — si musique il y a — pour vous montrer que ceci passe vraiment par une écriture, qu'on ne peut se contenter d'une évidence. Parce que d'un certain point de vue, ce théorème est évident : pas sa démonstration — encore qu'elle soit simple — mais dans son énoncé. Quel est-il ?
Sur un segment [a,b], on a des ouverts : on peut en dessiner une infinité, de telle façon qu'elle recouvre tout le segment :



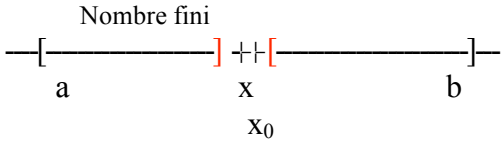
Il y a une infinité d'ouverts : autrement dit, si je prends n'importe quel point de [a, b], il existe nécessairement au moins un ouvert auquel le point x appartient.
Il y a une infinité d'ouverts dans ce segment, et ce que dit le théorème de Borel-Lebesgue c'est qu'on peut en extraire un nombre fini pour recouvrir [a,b].
Il y a une infinité d'ouverts sur ce segment, mais il suffit d'un nombre fini pour le recouvrir.

Par rapport à cet énoncé, on peut avoir plusieurs attitudes. D'abord, on peut se dire je ne vois pas de quoi il s'agit. On peut aussi se dire que c'est évident : il y en aune infinité, mais dans cette infinité je peux toujours en trouver un nombre fini qui suffira à recouvrir le segment.
Mais la façon dont les mathématiciens raisonnent pour le démontrer est la suivante :

Ce qu'on veut démontrer, c'est qu'il y a un nombre fini d'ouverts recouvrant [a,b].
On peut déjà dire que c'est vrai pour a, qui est l'une des extrémités, puisque on a dit que tous les ouverts, dans leur infinité, recouvraient [a,b]. Donc, il y en a au moins un qui recouvre a. Car s'il n'y en avait aucun qui recouvrait a, alors [a,b] ne serait pas recouvert.
Donc pour a, il y a 1 ouvert —nombre fini — qui contient a.
Supposons que ce soit vrai pour un certain nombre de points : par exemple pour un point x.
La propriété est alors vraie pour tout point de [a,x]. Ce point x ce n'est pas n'importe quel point : c'est le point le plus grand pour lequel la propriété est vraie :
$x \in [a,b]$ et x est le point le plus grand pour lequel un nombre fini d'ouverts recouvre [a,x].
Supposons donc que la propriété est vraie jusqu'à un certain point, x, compris entre a et b.
On a un nombre fini de a à x :



Si ça n'était vrai pour aucun point au-delà de x : il se trouve que x est dans un ouvert, il appartient à au moins un ouvert, nous l'avons dit.
Puisque c'est un ouvert, dans la topologie de la droite que nous considérons, au-delà de x il y a forcément un point x_0 légèrement plus grand que x, pour lequel la propriété est encore vraie puisque x_0 appartient à cet ouvert unique



Donc x que j'avais défini comme étant le plus grand pour lequel il y a un nombre fini d'ouverts, avec les définitions posées nous en déduisons qu'il n'est pas le plus grand, qu'il y a un x_0 qui se trouve dans l'ouvert entourant x et plus grand que x.
Donc on a posé que x était le plus grand, et on démontre qu'il n'est pas le plus grand.

La conclusion, c'est que pour tous les x intermédiaires je peux faire ce raisonnement-là : à chaque fois si je suis avant b je vais toujours trouver un point plus grand.
La conséquence, c'est qu'il n'y a pas au sens strict entre a et b de point plus grand, et donc la propriété est vraie pour b : le point le plus grand pour lequel la propriété est vraie est nécessairement en b.

Je ne sais pas si ça a été musical, mais je vais m'arrêter là pour aujourd'hui...

<Transcription de Lucien Verchezer>