Digressions sur « Le drame subjectif de Cantor »

א…

Au commencement était l'infini…

Quand bien même l'esprit de Cantor s'est dénoué les vingt dernières années de sa vie, la postérité de l'œuvre du mathématicien prouve, à tout le moins, qu'il a rejoint le Paradis qu'il avait créé et qu'Hilbert, prenant la mesure de l'apport, indiquait comme terre promise aux mathématiciens à l'orée du 20ème siècle.

En quoi les créatures de Cantor (les nombres transfinis) qu'il faut interroger sous le supposé dilemme épistémologique invention/découverte le révèlent-elles à lui-même ?

Par sa théorie des ordinaux et cardinaux transfinis vécue comme théologie mathématique, Cantor a voulu révéler, *et ancrer*, l'horizon que constituait jusqu'alors l'insaisissable et innommable Infini. Mais, *en même temps,* comme s'il fallait rendre à Dieu ce qui lui appartient, les impossibilités (hypothèse du continu indémontrable, paradoxes de la théorie des ensembles naïve) et l'incomplétude radicale (quel sens donner à l'éventuel cardinal transfini de l'ensemble des cardinaux transfinis ?) de la théorie ont dû contribuer à ouvrir pour son créateur le gouffre qu'il s'évertuait à boucher à l'aide de sa suite d'aleph ; symboles et première lettre du Livre qui auront été comme des appels incessants mais sans cesse insuffisants à faire bord i.e. à convoquer la métaphore paternelle.

Ce qui nous semble remarquable dans l'œuvre de Cantor est, qu'au delà de la mathématisation de l'infini actuel, il *nomme* cet infini. Acte transgressif et fondateur, prométhéen, il vole la lumière des dieux (de Dieu) pour l'offrir aux hommes (à l'Autre ?).

La question sera alors celle de la réception de cette lumière : par ses maîtres, par l'état de la science mathématique de cette époque. Qui s'empare de cette lumière transgressive reconnaît le donateur comme Démiurge, place à laquelle Cantor sera nécessairement assigné pour assurer (rassurer) sa création. Cette position de Maître est insoutenable pour lui. Comme si l'assimilation/dépossession par l'Autre de son œuvre créatrice (à qui l'adresse-t-il ?) impliquait, par cette nécessaire objectivation, qu'on lui vole une intimité. Comme si, dans et par ses créatures, c'est un autre monde, son monde et sa clôture qu'il avait cherché à façonner et qui devait rester impénétrable comme…l'infini ! Ce monde, insatiable par construction, repousse *sans fin* ses propres limites et l'entraîne dans une fuite éperdue où les signifiants finissent par ne plus rien pouvoir symboliser sauf le vide radical auquel Cantor s'attaquait.

Cantor assigne une cardinalité à l'infini. Avant tout, il nous faut distinguer l'ordinalité de la cardinalité : pour les ensembles finis, en comptant dans l'ordre un, deux ,trois, etc…, le dernier nombre nommé est le cardinal de l'ensemble, ce qui fait que, pour le fini, ordinalité et cardinalité peuvent être confondues. Il n'en est pas de même pour les ensembles infinis et notamment pour les nombres réels (qu'on ne peut écrire sous forme de fraction, de *rapport*, *ratio* d'entiers): peut-on les compter ? i.e existe-t-il un procédé d'énumération, une comptine ?

Il est bien clair qu'il n'est pas possible, a priori, de *donner* le nombre d'objets d'un ensemble infini sauf à dire, pour dire quelque chose, qu'ils sont en nombre…*in*fini (!), *in*commensurable, etc…leur nombre échappe à toute désignation *positive*, il est *in*nommable *pour tout dire.*

L'ordinalité ressortit de l'énumération, du mode de désignation des objets en les considérant dans leur singularité : ainsi, ne serait-ce que pour les entiers naturels, on peut compter 1,2,3 etc……dans cet ordre ω est l'ordinal de **N,** mais on peut également énumérer 2,3,4, etc…,1 (ordinal ω +1) ou encore 2,4,6, etc……..,1,3,5, etc….(ordinal 2ω), etc…

La cardinalité est alors la classe d'équivalence de toutes les ordinalités qui désignent le même modèle mathématique ; dans notre exemple précédent, l'ensemble des entiers naturels.
$\aleph_0$ est le cardinal de **N** (mais aussi celui de tout ensemble infini qui peut être mis en bijection (correspondance terme à terme biunivoque) avec lui). Il en est de même pour l'ensemble des nombres décimaux et des nombres rationnels (qu'on peut écrire sous forme de fraction d'entiers)). $\aleph_0$ est le cardinal de tout ensemble infini dénombrable, de tout ensemble pour lequel existe un procédé d'énumération de ses éléments.

En grec ancien, l'infini se dit απειρον (ce qui n'est pas fini) avec le préfixe privatif α, l'infini a donc une acception première négative. C'est, moyennant la migration par la civilisation arabo-musulmane, à l'héritage grec que nos racines scientifiques occidentales sont redevables. Cantor est un européen, son drame est nécessairement relatif à ce que la science occidentale admet comme norme de Vérité, de validation, de légitimité. Qu'en aurait-il été pour un Cantor chinois ou indien ?
Est-ce qu'un Cantor indien ou chinois aurait pu exister ? Et si jamais il avait existé, la question de l'infini l'aurait-elle à ce point taraudé ? L'aurait-il même posée en ces termes ?

Le drame de Cantor révèle non seulement sa singularité par son exclusion du lien social mais, corrélativement, sa congruence à un discours et des pratiques (où est l'autorité ?) qui légitiment ce qu'il en est de la Vérité et de ce qui la fonde : le Dieu unique était déjà le « Deus ex machina » de Descartes, fondateur du sujet de la science moderne.

S'approprier, en s'en faisant le scribe, les prérogatives de ce Dieu légitimateur en nommant sa mesure incommensurable, l'Infini - même si, avec Pascal, Cantor distingue différents ordres dans l'infini - c'est, si jamais, précisément, la précaution pascalienne n'est pas bien prise, toucher au blasphème ou encore une confusion des genres. L'invention/découverte de Cantor est alors à mettre en perspective avec la crise inaugurale de la psychose du Président Schreber. Dans les deux cas, la paranoïa, construction d'un monde-cautère, sera l'issue à la catastrophe introduite par le surgissement du Réel.

$\aleph_1$, puissance du continu, est le nom (signifiant) de l'infini actuel des réels (du Réel ?), c'est le premier infini actuel qui « succède » à la puissance du dénombrable (Hypothèse du continu). La construction de la suite des cardinaux transfinis ; $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4$…..montre que cette suite est elle même sans fin !
Un ensemble de puissance $\aleph_1$ (ou plus) possède une infinité d'éléments qu'il est impossible d'énumérer ; il faut renoncer à les compter sur ses doigts si jamais on s'imagine pouvoir en disposer d'une…infinité ! Là, nul bord pour dire le nombre, pas même une possibilité d'énumération. Autrement dit, les éléments d'un tel ensemble ne se prêtent pas à l'étiquetage. Un modèle d'un tel ensemble est l'ensemble **R** des nombres réels. Jusqu'aux nombres rationnels, il est possible de trouver un algorithme d'énumération qui, modulo l'ordre défini par cet algorithme, peut fournir la liste exhaustive des éléments de l'ensemble de nombres. Il n'en est pas de même pour les réels : explicitons le procédé diagonal de Cantor (justement !)

Mettons que les réels de 0 à 1 soient dénombrables i.e. qu'on puisse trouver un procédé d'énumération. Moyennant une précaution technique pour ne pas écrire deux fois le même réel (par exemple 0,0258 = 0,02579999…….) on choisit, pour les décimaux (ceux pour lesquelles la suite des décimales est finie), leur écriture infinie (dans notre exemple 0,0257999….à la place de 0,0258)). Nous n'aurons alors à faire, dans la liste, qu'à des suites infinies de décimales.
Puisque nous avons supposé que l'ensemble des réels de 0 à 1 était dénombrable nous avons donc une liste où nous distinguons, le premier nombre, le second etc, etc (ne correspondant pas nécessairement à l'ordre naturel (du plus petit au plus grand))
Maintenant, tous ces nombres ont pour partie entière 0, suit la virgule et la suite infinie des décimales (infini dénombrable puisque que l'on distingue la première décimale de la seconde etc…(numération de position)). Si la liste est exhaustive, comme nous l'avons supposé, aucun nombre entre 0 et 1 ne manque mais… construisons maintenant le nombre suivant : (est-ce un nombre se seraient inquiétés les grecs anciens ?) on prend, évidemment pour partie entière 0 suit la virgule, puis en première décimale nous prenons un chiffre différent de la première décimale du premier nombre de la suite, pour deuxième décimale nous prenons un chiffre différent du deuxième chiffre du deuxième nombre de la liste et ainsi de suite…
Qu'obtenons-nous (à la fin !) : un nombre entre 0 et 1 qui diffère de chacun des nombres de la liste initiale supposée exhaustive ! Ce nombre est bien compris entre 0 et 1 mais n'est pas dans la liste ! On imagine aussi aisément qu'il y en a une infinité qui n'y étaient pas. Contradiction !
Les réels excèdent de toutes parts les places qu'on voudrait leur assigner !
Nous ne pouvons donc pas énumérer les nombres réels, le Réel est ce qui se dérobe à toute emprise, qui ne cesse de ne pas s'écrire (de se nommer) dirait Lacan.
Nommer l'infini, positiver l'infini en le nommant, établir une algèbre de l'infini n'est-ce pas manger de l'arbre de la connaissance ? Pour Hilbert, Cantor a introduit les mathématiciens au Paradis, Cantor s'en est peut-être exclut tout seul ?!
Ironie : qui était la tentatrice et qu' était le serpent ?!..

Quand Cantor met en bijection les éléments d'un segment avec ceux d'un carré, il n'en revient pas, il écrit à Dedekind « Je le vois mais ne le *crois* pas ». Cela n'*affole* en rien Dedekind qui ne voit pas la raison de l'étonnement de son ami. Cantor demande à croire, comme si la Mathématique devait, pour lui, au-delà de la seule preuve (formelle) s'offrir comme révélation. Un segment et un carré peuvent bien « compter » *autant* d'éléments l'un que l'autre, ils ne sont topologiquement pas de même nature : il faut bien plus qu'une bijection pour identifier deux objets mathématiques dans la même classe topologique.
A la décharge de Cantor, le formalisme n'est pas encore formulé comme méthodologie mathématique et la théorie des ensembles qu'il a contribué à faire naître n'a pas encore reçue toute l'assurance épistémologique du modèle ZF (Zermelo-Fraenkel) , la topologie moderne encore moins. Cependant on pourrait ranger l'étonnement de Cantor dans le cadre d'une « confusion » topologique, mais, comme toute erreur, son erreur d'appréciation est signifiante.
Que peut-elle nous apprendre : que Cantor craint de ne plus y voir clair dans la distinction des objets, que l'on peut , par simple correspondance, passer d'un objet à l'autre (d'un sexe à l'autre ?), tout serait-il alors indifférencié ? ou tout ne serait-il rien ?
Pensons à l'ensemble triadique de…Cantor : si l'on considère un segment duquel on ôte le tiers médian et que, de chacun des deux segments restants, on procède de même et ainsi de suite on obtient à la fin (en itérant à l'infini (dénombrable)) un ensemble de mesure nulle qui a la même puissance que le segment initial qui a lui-même la puissance de la droite réelle, c'est-à-dire $\aleph_1$! Sans compter que ce « rien » a la même puissance que tout l'univers.
En d'autres termes, et pour aller vite, $0 = \infty$. Comment ne pas devenir fou ?

Thierry Berkover

27 février 2006 révisé le 1er octobre 2006.

Bibliographie sommaire

« Cantor »
Jean-Pierre Belna   Editions Les Belles Lettres

« Les mathématiciens »
Hors série « Pour la science » Editions Belin

« Infini et Inconscient » Essai sur Georges Cantor
Nathalie Charraud Editions Anthropos

« Lacan et les mathématiques »
Nathalie Charraud Editions Anthropos

« L'infini au carrefour de la Philosophie et des Mathématiques »
Jacqueline Guichard   Publications de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Poitiers

« Figures de l'infini » Les mathématiques au miroir des cultures
Tony Lévy   Editions Seuil

« Philosophie Mathématique »
Jean Cavaillès   Editions Hermann